DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Le problème est l'étude de deux méthodes itératives de résolution approchée d'un système d'équations linéaires et la comparaison de leurs vitesses de convergence.

$\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices à éléments réels possédant n lignes et p colonnes et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n.

Pour toute matrice A, on note a_{ij} l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On note 0 la matrice nulle de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$, I la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Étant donné un vecteur $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^n$, on notera V la matrice de $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ représentant $\vec{V}$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(A)$ le nombre :

$$\sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

I

1° Montrer que l'application :

$$A \to \|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| \right)$$

est une norme sur $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$. *Dans tout le problème, on supposera* $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ *muni de cette norme.*

2° Montrer que pour $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|AB\| \leq \|A\| \quad \|B\|$$

.../...

3° Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$$

4° Montrer que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable :

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

II

Soit $B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{k \to \infty} A^k = 0$.

1° Calculer en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de A les valeurs propres de $I - A$.

En déduire que $I - A$ est régulière.

2° Montrer que pour $r \in \mathbb{N}^*$:

$$I + A + A^2 + \ldots + A^{r-1} = (I - A^r)(I - A)^{-1}$$

En déduire que :

$$(I - A)^{-1} = \lim_{r \to \infty} (I + A + A^2 + \ldots + A^{r-1})$$

3° On considère dans $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$X^{(k)} = AX^{(k-1)} + B \qquad \text{avec} \qquad X^{(0)} \text{ donnée.}$$

Exprimer $X^{(k+1)} - X^{(k)}$ en fonction de $X^{(1)} - X^{(0)}$.

En déduire que pour $r \in \mathbb{N}^*$:

$$X^{(k+r)} - X^{(k)} = (I - A^r)(I - A)^{-1} A^k (X^{(1)} - X^{(0)})$$

4° Montrer que la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite qu'on notera X^*.

En déduire que :

$$X^* - X^{(k)} = (I - A)^{-1} A^k (X^{(1)} - X^{(0)})$$

5° Montrer que $X^* = AX^* + B$ et que X^* est la seule solution de l'équation $X = AX + B$.

III

Toute matrice carrée M s'écrit de manière unique $M = D + E + F$ avec D matrice diagonale, E matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle et F matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. En supposant D et $(D + E)$ régulières, on pose :

$$A' = -D^{-1}(E + F) \qquad A'' = -(D + E)^{-1} F$$

On considère deux méthodes de résolution approchée du système d'équations linéaires $MX = B$:

Méthode 1. — Définie par $DX^{(k)} = -(E + F) X^{(k-1)} + B$.

C'est-à-dire $X^{(k)} = A' X^{(k-1)} + D^{-1} B$, $X^{(0)} = 0$.

Méthode 2. — Définie par $(D + E) X^{(k)} = -F X^{(k-1)} + B$.

C'est-à-dire $X^{(k)} = A'' X^{(k-1)} + (D + E)^{-1} B$, $X^{(0)} = 0$.

On dit que la méthode (1 ou 2) est convergente si la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ correspondante est convergente.

Dans la partie III, on choisit :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1° Montrer que $A'^3 = \frac{1}{4} A'$. En déduire $\| A'^k \|$ et montrer que la méthode 1 est convergente.

2° Exprimer $(I - A')^{-1}$ en fonction de I, A' et A'^2.

En déduire que pour la méthode 1, on a :

$$\| X^* - X^{(k)} \| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} \| B \|$$

3° Montrer que $A''^3 = \frac{1}{4} A''^2$. En déduire $\| A''^k \|$ et montrer que la méthode 2 est convergente.

.../...

4° Exprimer $(I - A'')^{-1}$ en fonction de I, A'' et A''^2.

En déduire que pour la méthode 2, on a :

$$\|X^* - X^{(k)}\| \leqslant \frac{273}{2^{2k+7}} \|B\|$$

IV

Les notations étant celles de la partie III, on choisit pour M la matrice $n^2 \times n^2$ définie par :

$$\begin{cases} m_{ii} = 4 & i = 1, \ldots, n^2 \\ m_{i,i-n} = -1 & \text{si } i \geqslant n+1 \\ m_{i,i+n} = -1 & \text{si } i \leqslant n^2 - n \\ m_{i,i-1} = -1 & \text{si } i \not\equiv 1 \pmod{n} \\ m_{i,i+1} = -1 & \text{si } i \not\equiv 0 \pmod{n} \\ m_{ij} = 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Pour $n = 2$, on retrouve la matrice envisagée dans III.

On appelle vitesse asymptotique de convergence d'une méthode définie par $X^{(k)} = AX^{(k-1)} + B'$ le nombre $v = -\operatorname{Log} \rho(A)$.

1° Montrer par récurrence sur n que, pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, on a :

$$S_n(\theta) = 2 \sum_{p=1}^{n} \cos p\theta = \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \sin(n+1)\theta - \cos(n+1)\theta - 1$$

2° On pose $h = \dfrac{\pi}{n+1}$ et on considère la matrice :

$$R = \begin{pmatrix} \sin h & \sin 2h & . & \sin nh \\ \sin 2h & \sin 4h & . & \sin 2nh \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \sin nh & \sin 2nh & . & \sin n^2 h \end{pmatrix}$$

Calculer R^2 et en déduire que R est régulière.

3° Pour tout entier $i \in [1, n^2]$, on note α et β les deux entiers tels que :

$$\begin{cases} i = (\alpha - 1)\, n + \beta \\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n,\ 1 \leqslant \beta \leqslant n \end{cases}$$

p et q étant deux entiers compris entre 1 et n, on note $\vec{V}_{pq}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$ dont la $i^{\text{ème}}$ composante a pour valeur :

$$x_i = \sin \alpha ph \sin \beta qh \qquad (1 \leqslant i \leqslant n^2)$$

On démontre que $\vec{V}_{pq}$ est vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda_{pq} = 4 - 2\cos ph - 2\cos qh$ *(on ne demande pas de vérifier cette propriété).*

Montrer que les n^2 vecteurs $\vec{V}_{pq}$ sont linéairement indépendants. On pourra considérer d'abord les n premières composantes de ces vecteurs, puis les n composantes suivantes, etc. Il sera commode d'introduire le vecteur $\vec{W}_j$ $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice R.

4° Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A'.

En déduire que la méthode 1 est convergente et calculer sa vitesse de convergence.

5° Montrer que les valeurs propres de A' sont les zéros du polynôme $P(\lambda') = \det(\lambda' D + E + F)$ et que les valeurs propres de A'' sont les zéros du polynôme $Q(\lambda'') = \det(\lambda'' D + \lambda'' E + F)$.

6° Pour $\gamma \in \mathbb{C}^*$, *on note* S la matrice diagonale d'ordre n^2 définie par :

$$\begin{cases} s_{ii} = \gamma^{2-i} & i = 1, \ldots, n \\ s_{ii} = \dfrac{s_{i-n,i-n}}{\gamma} & n+1 \leqslant i \leqslant n^2 \end{cases}$$

On démontre que : $S(\gamma^2 D + \gamma^2 E + F)\, S^{-1} = \gamma(\gamma D + E + F)$.

On ne demande pas de vérifier cette propriété.

Calculer les valeurs propres non nulles de A'' en fonction des valeurs propres de A'. En déduire la vitesse de convergence de la méthode 2 (on admettra que cette méthode est convergente).

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail